Gewöhnliche Differentialgleichung: NWI
-Sophiane Yahiatene-

Aufgabe 8.1 Betrachte das Anfangswertproblem:

$$u'(t) = t^{-2}u(t)^2$$
$$u(5) = -10$$

Die exakte Lösung lässt ich mit Hilfe der Methode "Trennung der Variablen" wie folgt errechnen.

$$-\frac{1}{u} - \frac{1}{10} = \int_{-10}^{u} \frac{1}{v^2}\mathrm{dv} = \int_{5}^{t} \frac{1}{\tau}\mathrm{d}\tau = -\frac{1}{t} + \frac{1}{5}$$
$$\Leftrightarrow u = -\frac{10t}{3t-10} \qquad \text{für alle } t \in (\frac{10}{3}, \infty)$$

Die benötigten Schrittweiten, um einen maximalen Fehler von 10^{-6} zu erhalten, lauten:

	t	h	Fehler
Euler	10	4^{-11}	$\approx 2,5 \cdot 10^{-7}$
	15	4^{-10}	$\approx 7,1 \cdot 10^{-7}$
	20	4^{-10}	$\approx 6,1 \cdot 10^{-7}$
klass. R-K	10	4^{-10}	$\approx 6,0 \cdot 10^{-7}$
	15	4^{-10}	$\approx 3,9 \cdot 10^{-7}$
	20	4^{-10}	$\approx 3,2 \cdot 10^{-7}$

Aufgabe 8.2 Betrachte das Anfangswertproblem:

$$u'(t) = t\cos(u(t))^2$$
$$u(-5) = 0$$

Die exakte Lösung lässt ich mit Hilfe der Methode "Trennung der Variablen" wie folgt errechnen.

$$\tan(u) = \tan(u) - \tan(0) = \int_{0}^{u} \frac{1}{\cos(v)^2}\mathrm{dv} = \int_{-5}^{t} \tau\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}t^2 - \frac{25}{2}$$
$$\Leftrightarrow u = \arctan(\frac{1}{2}t^2 - \frac{25}{2}) \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

Die benötigten Schrittweiten, um einen maximalen Fehler von 10^{-6} zu erhalten, lauten:

	t	h	Fehler
Euler	0	4^{-9}	$\approx 3,0 \cdot 10^{-7}$
	5	4^{-13}	$\approx 6,4 \cdot 10^{-9}$
	10	4^{-13}	$\approx 5,2 \cdot 10^{-9}$
klass. R-K	0	4^{-9}	$\approx 6,0 \cdot 10^{-8}$
	5	4^{-9}	$\approx 3,9 \cdot 3,1^{-14}$
	10	4^{-9}	$\approx 6,8 \cdot 10^{-9}$

Aufgabe 8.3 Sei $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ (x+y)^2 \end{pmatrix}$ ein glattes Vektorfeld und $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ x+y \end{pmatrix}$ ein Diffeomorphismus mit Umkehrabbildung $\phi^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y-x \end{pmatrix}$.

1. Behauptung: $u(x) = x + y(x)$ genügt der Differentialgleichung $u'(x) = 1 + u(x)^2$, wobei y Lösung der Gleichung $y'(x) = (x + y(x))^2$ ist.

   Beweis. Es gilt nach Vorlesung 9:
   γ ist genau dann eine Integralkurve von X, wenn $\phi \circ \gamma$ eine Integralkurve von X^ϕ ist.$^{(*)}$

   Das heißt anstelle der Differentialgleichung $\frac{d\gamma}{dx}(x) = X(\gamma(x))$ kann man auch $\frac{d(\phi\circ\gamma)}{dx}(x) = X^\phi(\phi \circ \gamma(x))$ lösen, um mit Hilfe von ϕ^{-1} die Lösungen der ursprünglichen Differentialgleichung erhalten.

   Es gilt also für das modifizierte Vektorfeld X^ϕ:

$$\begin{aligned} X^\phi \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} &= J\phi\ (\phi^{-1} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}) \cdot X(\phi^{-1} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \begin{pmatrix} x \\ u-x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ u^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1+u^2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

   wobei $J\phi(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ die Jacobimatrix von ϕ an der Stelle $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ist.
   Nun ist nach dem Satz* aus Vorlesung 9 mit der Integralkurve $\gamma(x) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ von X

$$\begin{pmatrix} x \\ u(x) \end{pmatrix} = \phi \circ \gamma(x) = \phi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x+y \end{pmatrix}$$

   eine Integralkurve von $X^\phi \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+u^2 \end{pmatrix}$.
   Also genügt $u(x) = x + y(x)$ der Differentialgleichung $u'(x) = 1 + u(x)^2$. □

2. Behauptung: $y(x) = \tan(x + c) - x$ löst die Differentialgleichung $y'(x) = (x + y(x))^2$

   Beweis. Aus dem ersten Teil der Aufgabe erhält man durch die Koordinatentransformation ϕ die Differentialgleichung $u'(x) = 1 + u(x)^2$, welche mit Hilfe von "Trennung der Variablen"lösbar ist.

$$\begin{aligned} &\int \frac{1}{v^2+1} \mathrm{dv} = \int 1 \mathrm{dt} \\ &\Leftrightarrow \arctan(u) = t + c \\ &\Leftrightarrow u = \tan(t+c) \qquad \text{für alle } t \in (-\frac{\pi}{2} - c, \frac{\pi}{2} - c) \end{aligned}$$

   Also lautet die Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung mit $\phi^{-1}\begin{pmatrix} x \\ u(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \tan(x+c) - x \end{pmatrix}$

$$y(x) = \tan(x+c) - x \qquad \text{für alle } x \in (-\frac{\pi}{2} - c, \frac{\pi}{2} - c).$$

   □

Aufgabe 8.4 Sei $X : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + \frac{y}{x} \end{pmatrix}$ ein glattes Vektorfeld und $\phi : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ \frac{y}{x} \end{pmatrix}$ ein Diffeomorphismus mit Umkehrabbildung $\phi^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \cdot x \end{pmatrix}$.

1. <u>Behauptung:</u> Die Differentialgleichung für $u(x) := \frac{y}{x}$ lautet $u'(x) = \frac{1}{x}$

   Beweis. Analog zur Aufgabe 8.3 gilt

   $$X^\phi \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{u}{x} & \frac{1}{x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{x} \end{pmatrix},$$
   $$\begin{pmatrix} x \\ u(x) \end{pmatrix} = \phi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{y}{x} \end{pmatrix},$$

   woraus die Behauptung folgt. □

2. <u>Behauptung:</u> Die Lösung der allgemeinen Differentialgleichung lautet $y(x) = \ln(x) \cdot x$

   Beweis. Die Lösung der transformierten Differentialgleichung $u'(x) = \frac{1}{x}$ lautet $u(x) = ln(x) + c$ für $x > 0$ und somit lautet die allgemeine Lösung

   $$y(x) = \left(\phi^{-1} \begin{pmatrix} x \\ \ln(x) + c \end{pmatrix} \right)_{(2,1)} = (\ln(x) + c)x.$$

   □